PART2　漸化式と一般項

例題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-9$

Point Pickup

練習

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4$

第 4 講　PART2 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+2\cdot3^n$

$a_n=\boxed{ア}^n+\boxed{イ}$

2　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$

$a_n=\boxed{ウ}\cdot\boxed{エ}^{n-1}-\boxed{オ}$

PART2　漸化式と一般項

例題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-9$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1} k=1+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

(2)　$a_{n+1}=4a_n-9$ を変形すると，$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 $a_1-3=6-3=3$，公比4の等比数列である。

したがって，$a_n-3=3\cdot4^{n-1}$ より，求める一般項は　$a_n=3\cdot4^{n-1}+3$

練習

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+4$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=4^n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=3+\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\dfrac{4^n+5}{3}$

$a_1=3$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{4^n+5}{3}$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+4$ を変形すると，$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 $a_1+2=1+2=3$，公比 3 の等比数列である。

したがって，$a_n+2=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ より，求める一般項は　$a_n=3^n-2$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1

[解説]

$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+2\cdot3^n$ [A]

$a_{n+1}-a_n=2\cdot3^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_n=2\cdot3^n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$ [B]

$$=4+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot3^k$$

$$=4+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=3^n+1$$

$a_1=4$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $\boldsymbol{a_n=3^n+1}$

[A]　$a_{n+1}-a_n=2\cdot3^n$
$2\cdot3^n$ が階差数列の一般項になる。

[B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq2$ のとき
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

2

[正解] ウ：5，エ：2，オ：3

[解説]

$a_{n+1}=2a_n+3$　……①　[C]

$\alpha=2\alpha+3$　……②

①－②より $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$

②より，$\alpha=-3$ であるから

$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

また $a_1+3=2+3=5$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は，初項 5，公比 2 の等比数列である。

$a_n+3=5\cdot2^{n-1}$

より，求める一般項は $\boldsymbol{a_n=5\cdot2^{n-1}-3}$

[C]　$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq0,\ p\neq1)$ の形の漸化式では，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形する。